Es. 1: (1) Data $f: V \to W$ lineare:

f omom. di L-moduli $\iff \forall x \in L, \forall v \in V$: $f(x.v) = x.f(v)$

$\iff \forall x \forall v$: $f(-x.v) + x.f(v) = 0 \iff x.f = 0$

azione su $Hom(V, W)$

(2) Analogo osservando che $(g \cdot f)(v) = g \cdot f(g^{-1} v)$, che è uguale a $f(v)$ se e solo se $g^{-1} \cdot f(v) = f(g^{-1} \cdot v)$. Questo vale $\forall g \in G$ se e solo se $g \cdot f(v) = f(gv)$ $\forall g \in G$.

Es. 2:

$$(x.f)(v \otimes w) = f((-x).(v \otimes w)) =$$

$$= f((-x.v) \otimes w + v \otimes (-x.v)) =$$

$$= b([v, x], w) - b(v, [x, w])$$

(non serve b, c simmetriche!)

Es. 3:

b induce un isom. $L \xrightarrow{\varphi} L^*$, $v \mapsto b(v, \bullet)$ e c induce un

cioè il funzionale $y \mapsto b(v, y)$

isom. $L \xrightarrow{\psi} L^*$, $v \mapsto c(v, \bullet)$

Sono isom. di L-moduli, dove L è un L-modulo con ad.

Infatti dato $x \in L$ abb.

$$\varphi(x.v) = \varphi([x, v]) = b([x, v], \bullet) = b([v, -x], \bullet) =$$

$$= b(v, [-x, \bullet]) = x.(b(v, \bullet)) = x.\varphi(v)$$

e analogam. con c invece che b.

Quindi $\psi^{-1} \circ \varphi : L \to L$ è isom. di L-moduli.

L è semplice, quindi un L-modulo irriducibile tramite ad.

Dal Lemma di Schur, esiste $\alpha \in k$ t.c.

$$\psi^{-1} \circ \varphi = \alpha \cdot Id_L$$

Ora, l'appl. ψ^{-1} manda un funzionale $\eta \in L^*$ nel vettore $w \in L$ tale che $\eta(\bullet) = c(w, \bullet)$.

Quindi $\psi^{-1} \circ \varphi$ manda $v \in L$ nel vettore w tale che $b(v, \bullet) = c(w, \bullet)$. Dall'uguaglianza $\psi^{-1} \circ \varphi = \alpha \cdot Id_V$ otteniamo $w = \alpha v$ (α indipendente da v), cioè

$$b(v, \bullet) = c(\alpha v, \bullet), \text{ cioè}$$

$$\forall u \in L : \ b(v, u) = \alpha \cdot c(v, u).$$

Es. 4: $V = V_1 \oplus V_{-1}$ scegliamo autovett. $v_i \in V_i$

$W = W_2 \oplus W_0 \oplus W_{-2}$ e $w_j \in W_j$

Inoltre $v_1 \otimes w_2$ è h-autovett. di autoval. $1+2=3$, infatti $h.(v_1 \otimes w_2) = (h.v_1) \otimes w_2 + v_1 \otimes (h.w_2) =$

$$= (1 \cdot v_1) \otimes w_2 + v_1 \otimes (2 \cdot w_2) = (1+2)\, v_1 \otimes w_2$$

e così per $v_i \otimes w_j$.

Inoltre $v_{-1} \otimes w_2$ e $v_1 \otimes w_0$ sono entrambi autovett. di autoval. 1. Quindi la base $v_i \otimes w_j$ è fatta di h-autovettori, e i pesi sono:

vetto	peso
$v_1 \otimes w_2$	3
$v_1 \otimes w_0$	1
$v_{-1} \otimes w_2$	1
$v_1 \otimes w_{-2}$	-1
$v_{-1} \otimes w_0$	-1
$v_{-1} \otimes w_{-2}$	-3

Segue: $\dim(V_3) = 1$

$\dim(V_1) = 2$

$\dim(V_{-1}) = 2$

$\dim(V_{-3}) = 1$

Deduciamo $V \otimes W = V(3) \oplus V(1)$

Es. 5: k^2 è irriducibile di dim. 2, quindi $k^2 \simeq V(1)$

infatti gli h-pesi su k^2 sono 1 e -1 $\left(h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right)$.

Sia (η_1, η_2) la base duale della base canonica (e_1, e_2) di k^2.

Allora
$$(h.\eta_1)(e_1) = \eta_1(-h.e_1) = \eta_1(-e_1) = -1$$
$$(h.\eta_1)(e_2) = \eta_1(-h.e_2) = \eta_1(\ e_2) = 0$$

da cui $h.\eta_1 = -\eta_1$: η_1 è vettore di peso -1.

Analogam. $h.\eta_2 = \eta_2$: η_2 è vettore di peso 1.

Unica possibilità: $(k^2)^* \simeq V(1)$ $(\simeq k^2)$.

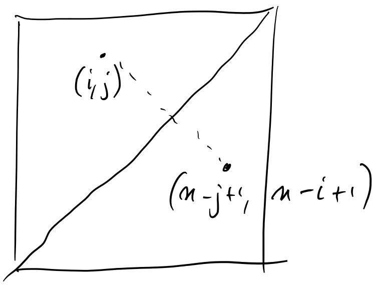
Es. 6: (2)

$$\mathfrak{sl}(3) = \underset{V(1)}{\left\{ \begin{pmatrix} \boxed{0} & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}} \oplus \underset{V(1)}{\left\{ \begin{pmatrix} \boxed{0} & 0 \\ * & 0 \end{pmatrix} \right\}} \oplus \underset{V(2)}{\left\{ \begin{pmatrix} \mathfrak{sl}(2) & \\ & \end{pmatrix} \right\}} \oplus \underset{V(0)}{\left\{ \begin{pmatrix} a \cdot I_2 & \\ & -2a \end{pmatrix} \Bigg| \, a \in k \right\}}$$

(1) è ovvio

Es. 7: 1) $so(n, J_0) = \{ A \in gl(n) \mid A$ è antisimm. rispetto alla diag. secondaria $\}$

Sia $K \supseteq H$ abeliana, sia $x \in K$. Consid. la base di $so(n, J_0)$ formata da $e_{ij} - e_{n-j+1, n-i+1} = S_{ij}$ con $i+j < n+1$ (da cui segue $n-j+1+n-i+1 > n+1$)



Dato $y \in H$, y è della forma

$$\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad a_i = -a_{n-i+1} \quad (\text{cioè } a_1 = -a_n,\ a_2 = -a_{n-1} \text{ ecc...})$$

Vale $[y, e_{ij}] = (a_i - a_j) e_{ij}$

$$[y, S_{ij}] = (a_i - a_j) e_{ij} - (\underbrace{a_{n-j+1}}_{= -a_j} - \underbrace{a_{n-i+1}}_{= -a_i}) e_{n-j+1, n-i+1} =$$

$$= (a_i - a_j) S_{ij}$$

Quindi gli S_{ij} sono autovettori simultanei per tutta H.

Scriviamo $x \in K$ come comb. lin. degli s_{ij}:

$$x = \underbrace{\sum_{\substack{i=j \\ i+j<n+1}} c_{ij} \overbrace{s_{ij}}^{\in H}}_{\in H} + \sum_{\substack{i\neq j \\ i+j<n+1}} c_{ij} s_j$$

Visto che K è abeliana vale $[Y, x]=0$, d'altronde

$$0 = [Y, x] = \sum_{i=j} c_{ij} \underbrace{[Y, s_{ij}]}_{=0} + \sum_{\substack{i\neq j \\ i+j<n+1}} c_{ij} \underbrace{[Y, s_{ij}]}_{=(a_i - a_j) s_{ij}}$$

Per ogni $i\neq j$, $i+j<n+1$ esiste Y come sopra tale che $a_i - a_j \neq 0$, quindi $c_{ij}=0$ $\forall i,j$ con $i\neq j$ e $i+j<n+1$.

Concludiamo: $x \in H$.

2) $sp(n, J_1) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & -\tilde{A} \end{pmatrix} \mid A, B, C \in gl(n/2)\ \tilde{A} = \text{trasp. di } A \text{ rispetto alla diag. sec., } B \text{ e } C \text{ simm rispetto alla} \text{ —''— } \right\}$

Il ragionam. è simile a $so(n, J_0)$, usando

$$s_{ij} = e_{ij} \pm e_{n-j+1, n-i+1}$$

che sono autovett. di $Y = \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix} \in H$ di autoval.

$a_i + a_{n-i+1}$.

3) $sl(n)$: simile, usando $s_{ij}=e_{ij}$ con $i\neq j$, che hanno autoval. $a_i - a_j$

Es. 8: Sia $x \in H' \setminus \{0\}$ semisemplice, allora è diagonalizzabile: $\exists g \in GL(2) \mid$

$y = gxg^{-1} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$. D'altronde $tr(x) = 0 \Rightarrow tr(gxg^{-1}) = 0$,

cioè $y = \begin{pmatrix} a & \\ & -a \end{pmatrix} \in H$. Ora: tutti gli elem. di H'

commutano, quindi si diagonalizzano simultaneamente. In

altre parole, esiste un singolo $g \in Gl(2)$ tale che

gxg^{-1} è in H $\forall x \in H'$. Cioè $gH'g^{-1} \subseteq H$,

da cui segue $\dim(gH'g^{-1}) \leq 1$, e concludiamo $\dim(gH'g^{-1}) = 1$

perché $H' \neq \{0\}$. Segue $gH'g^{-1} = H$.